

**ФИЗИЧЕСКАЯ
И КВАНТОВАЯ ОПТИКА**

УДК 535.36

**РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
НА СЛУЧАЙНО-ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ
КАК ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ СО СВЕТОРАССЕИВАЮЩИМИ
МАТЕРИАЛАМИ И СРЕДАМИ**

© 2004 г. Д. А. Рогаткин

Московский государственный институт электроники и математики, 109028 Москва, Россия

E-mail: laserrog@mtu-net.ru

Поступила в редакцию 04.07.2003 г.
В окончательной редакции 15.01.2004 г.

Исследовано рассеяние света на шероховатой поверхности со случайными гауссовыми флуктуациями шероховатостей. Рассмотрен случай грубых шероховатостей, когда их параметры – среднее отклонение и радиус корреляции – значительно превосходят длину волны. Приведены замкнутые аналитические решения задачи в терминах радиофизики для граничных условий идеального проводника и импедансных граничных условий. Дана формулировка этих решений в терминах фотометрических индикатрис рассеяния. Обсуждена возможность их применения в задачах фотометрии и теории переноса и рассеяния света в мутных средах, в том числе в задачах моделирования процесса граничного рассеяния лазерного излучения на неровной поверхности биологических тканей и сред.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время с развитием методов лазерной неинвазивной диагностики в биологии и медицине [1] вновь возник повышенный интерес к задачам теоретического описания процесса распространения оптического излучения в мутных светорассеивающих материалах и средах. В первую очередь это связано с необходимостью создания высокоуровневых алгоритмов обработки диагностических данных, основанных на решении обратных задач оптики светорассеивающих сред [2]. Сегодня наиболее часто используемые для этих целей и практически единственные существующие аналитические методы – классические методы теории переноса (ТП) излучения в случайно-неоднородных средах [3] – далеко не всегда оказываются эффективными на практике. Например, большие трудности в классической ТП вызывают многомерные пространственные задачи рассеяния и задачи, связанные с расчетом поля излучения в плотноупакованных средах при выраженной анизотропии рассеяния [4]. В связи с этим актуальным является поиск новых алгоритмов и методов решения подобных задач.

Недавно нами была показана возможность развития новых аналитических подходов к решению многомерных задач распространения излучения в толще среды на основе потоковых моделей Кубелки–Мунка [5]. В качестве граничных

значений потоков в этих моделях должна выступать некая функция распределения интенсивности излучения по граничной поверхности раздела сред, процедура определения которой в общем случае пока не известна. Подавляющее большинство существующих моделей в ТП используют сегодня локальные условия плоской границы раздела. Граничные значения интенсивности излучения в них определяются на основе известных формул Френеля для бесконечной плоскости раздела среда–воздух. Для диффузионного приближения дополнительно задают нулевой поток диффузионной составляющей излучения у границы среды [3]. Иногда используют более сложные аппроксимирующие формулы для коэффициента отражения или вводят некоторую эффективную (условную) границу раздела двух сред [6].

Между тем очевидно, что поверхность большинства реальных светорассеивающих материалов и сред, в том числе биологических, представляет собой не плоскую, а достаточно рыхлую (неровную) случайно-шероховатую среду, размеры шероховатостей которой, особенно в случае биологических тканей, как правило, больше длины волны освещающего их излучения. Интуитивно понятно, что пространственные параметры светового пучка при его взаимодействии с такой шероховатой границей должны претерпевать определенные изменения по сравнению с ситуацией

падения излучения на гладкую поверхность. Скорее всего, при проникновении в среду луч за счет неровности поверхности будет дополнительно уширяться, и это начальное уширение скажется каким-то образом на общем решении задачи о распределении поля излучения внутри самой среды. Однако классическая ТП не дает сегодня никакого ответа на вопрос, как именно могут меняться пространственные параметры луча при пересечении им неровной поверхности раздела сред.

Неучет шероховатых границ в ТП представляется весьма удивительным, особенно если учесть, что параллельно существуют дифракционные методы электродинамики, позволяющие в принципе решать подобные задачи. Эти методы, первоначально развитые для радиолокации [7], неоднократно и с разным успехом применялись рядом авторов и в задачах оптики и фотометрии, например для объяснения наблюдаемых оптических свойств конструкционных материалов [8]. Но, к сожалению, в силу целого ряда причин они пока не нашли своего должного распространения на задачи ТП. Так, в силу сильных радиофизических “корней” этих методов многие решения, полученные в них, сформулированы сегодня в терминах электродинамики, а не фотометрии, что затрудняет их непосредственное применение в задачах ТП. Как следствие, например, под индикатрисой рассеяния в [9] вынужденно понимается относительное угловое распределение интенсивности излучения по отношению к амплитуде зеркального максимума, в то время как по определению в фотометрии индикатриса должна нести и абсолютную информацию о величине интенсивности излучения в любом рассматриваемом направлении [10]. Кроме того, из-за определенных математических сложностей наглядные аналитические решения до недавнего времени в методах теории дифракции электромагнитных волн на случайно-шероховатых поверхностях можно было получить лишь для идеально проводящих или хорошо проводящих (металлических) поверхностей (так называемые граничные условия Леонтовича [11]), применение которых в оптике и фотометрии, на первый взгляд, весьма ограничено. Сравнительно недавняя работа [12] открыла пути к поиску аналитических решений и для диэлектрических поверхностей и сред, каковыми в оптическом диапазоне и являются большинство биологических тканей. А использование лазерного излучения в современной фотометрии и медицине стерло последнюю грань между вычислительными методами радиолокации и оптики в смысле когерентности и других волновых свойств исходного (освещающего) излучения.

Таким образом, сегодня сложились определенные предпосылки для привлечения дифракцион-

ных методов электродинамики к решению расчетных граничных задач ТП и, в частности, биомедицинской оптической диагностики. Целью данной конкретной работы являются ответы на вопросы, как рассеивается излучение шероховатой поверхностью биологических тканей (применительно к расчетным задачам ТП) и можно ли описать (оценить) это рассеяние в рамках классической теории дифракции электромагнитных волн на случайно-шероховатых поверхностях.

БАЗОВАЯ ТЕОРИЯ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОГО ПРОВОДНИКА

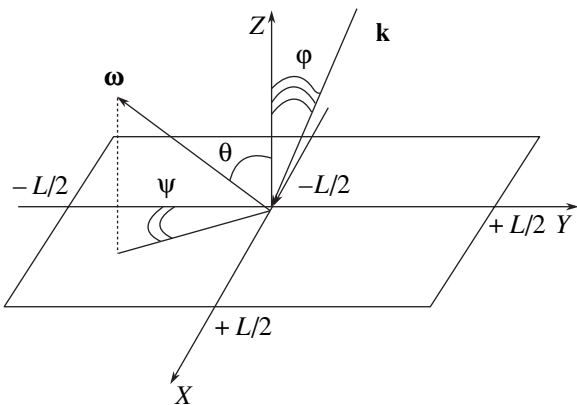
Начать изучение поставленной проблемы удобнее с рассмотрения простейшей классической задачи дифракции электромагнитного излучения на поверхности шероховатого идеального проводника. Она позволяет получить важные опорные решения, которые могут быть развиты в дальнейшем, и проанализировать их на предмет применимости в задачах фотометрии.

В общем случае подавляющее большинство задач современной теории рассеяния волн на случайно-шероховатых поверхностях базируется на решении векторных интегральных уравнений Грина, которые для дифракционных задач электродинамики известны так же, как векторные формулы Стреттона–Чу [13],

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^S(\mathbf{r}) &= \operatorname{rot} \int_S \mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' + \\ &+ \frac{i}{k\epsilon} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_S \mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS', \\ \mathbf{H}^S(\mathbf{r}) &= \operatorname{rot} \int_S \mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' - \\ &- \frac{i}{k\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_S \mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS', \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{E}^S(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}^S(\mathbf{r})$ – комплексные амплитуды рассеянных поверхностью электрического и магнитного полей в точке пространства \mathbf{r} , S – площадь рассеивающей поверхности, \mathbf{n}' – единичный вектор внешней нормали к S в точке поверхности \mathbf{r}' , k – волновое число, ϵ и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}/4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ – функция Грина.

Выражения (1) справедливы для любой точки пространства без каких-либо ограничений. Они позволяют вычислять рассеянное поверхностью S поле через вычисление тангенциальных компонент $(\mathbf{n}' \times \mathbf{E}; \mathbf{n}' \times \mathbf{H})$ векторов поля на S . Получить



Общая геометрия задачи. Пояснения в тексте.

их точные значения можно, в свою очередь, лишь найдя решения дополнительных интегральных уравнений, которые в общем случае для любых поверхностей и сред решить весьма сложно. Поэтому для определения тангенциальных компонент приходится использовать различные приближенные подходы. Один из наиболее простых заключается в использовании граничных условий идеального проводника

$$\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') = \mathbf{J}(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') = 0 \quad (2)$$

и известного приближения Кирхгофа:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = 2\mathbf{n}' \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}'), \quad (3)$$

где $\mathbf{H}^i(\mathbf{r}')$ – падающее поле плоской волны, $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ – поверхностный ток на S . В этом случае система (1) существенно упрощается, и для поля, рассеянного поверхностью идеального проводника, достаточно рассмотреть интегральное уравнение

$$\mathbf{H}^S(\mathbf{r}) = \int_S \nabla_r \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times [2\mathbf{n}' \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}')] dS'.$$

Его решение может быть получено в замкнутом виде. Необходимо лишь дополнительно описать саму шероховатую поверхность и выбрать общую геометрию задачи в соответствующей системе координат. Общая геометрия задачи для нашего случая представлена на рисунке. Чтобы описать случайно-шероховатую поверхность, с точки зрения получения конечного аналитического решения наиболее удобно высоты ее шероховатостей считать случайным гауссовым однородным и изотропным полем $z = \xi(x, y)$ с нулевым средним ($\langle \xi(x, y) \rangle = 0$), дисперсией $\langle \xi^2(x, y) \rangle = h^2$ и гауссовой корреляционной функцией

$$C(\tau) = \frac{\langle \xi(x, y) \xi(0, 0) \rangle}{\langle \xi^2(x, y) \rangle} = e^{-\tau^2/T^2},$$

где $\tau^2 = x^2 + y^2$ – расстояние между рассматриваемыми точками, T – длина корреляции.

Безусловно, реальные шероховатости как металлических, так и диэлектрических поверхностей могут отличаться от такой идеализированной модели. Однако, как было показано в [14], использование других корреляционных функций при расчетах не сильно сказывается на конечном результате вычислений, по крайней мере, для рассеянного во внешнее полупространство поля. Но это достаточно сильно усложняет саму процедуру получения конечных аналитических формул. Поэтому представление о гауссовых шероховатостях является, на наш взгляд, наиболее удобным при проведении необходимых нам первых, оценочных расчетов. В дальнейшем можно будет видоизменить параметры случайного поля и оценить появляющиеся при этом различия в результатах. Необходимо, правда, заметить, что в [15] на основе анализа большого количества реальных шероховатых поверхностей показано, что очень большое их число достаточно правдоподобно описывается именно гауссовым случайным полем.

Саму поверхность в нашей расчетной схеме удобно представить в виде квадратной пластинки с длиной стороны L , на которую сверху под углом ϕ к нормали падает единичная неограниченная плоская и линейно поляризованная электромагнитная волна

$$\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\eta} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})}, \quad |\mathbf{k}| = k,$$

где $\boldsymbol{\eta}$ – единичный орт плоскости поляризации падающей волны.

Направление рассеяния во внешнее полупространство будем характеризовать вектором $\boldsymbol{\omega}$. Предположим, что средняя плоскость пластинки совпадает с координатной плоскостью XOY , и рассмотрим решение задачи для поля, рассеянного во внешнее полупространство [9]. Решение строится для дальней зоны излучения в виде

$$\mathbf{H}^S(\mathbf{r}) = \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \int_S \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{n}' \times \boldsymbol{\eta}] e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r}')} dS', \quad (4)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}\omega$, R – расстояние от начала координат до точки наблюдения.

Далее, используя формализм Исаковича–Бекмана [9, 16], пренебрегая краевыми эффектами, усредняя рассеянное поле по ансамблю случайных поверхностей, суммируя среднюю интенсивность когерентной и некогерентной частей рассеянного поля, можно получить общее решение задачи в виде выражения для средней радиофизической интенсивности рассеянного поля в даль-

ней зоне, нормированной на интенсивность исходной падающей волны [17],

$$H_1(\varphi, \theta, \psi) = \frac{|\mathbf{H}^s(\mathbf{r})|^2}{|\mathbf{H}^i(\mathbf{r}')|^2} = \frac{1}{R^2} \frac{S}{\lambda^2} e^{-g} |\boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{q} \times \boldsymbol{\eta}]|^2 \frac{1}{q_z} \times$$

$$\times \left(S \left(\frac{\sin q_x L/2}{q_x L/2} \right)^2 \left(\frac{\sin q_y L/2}{q_y L/2} \right)^2 + \right. \quad (5)$$

$$\left. + \pi T^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g^m}{m! m} e^{-q_{xy}^2 T^2 / 4m} \right),$$

где q_x, q_y, q_z – компоненты вектора \mathbf{q} , $q_{xy} = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$, $S = L^2$, $g = h^2 q_z^2$, $\lambda = 2\pi/k$ – длина волны.

Для оптического диапазона длин волн и приложений этого решения к задачам фотометрии и ТП его требуется переформулировать в терминах оптики и фотометрии. Фундаментальным понятием фотометрии является сила или интенсивность света $I_{e\lambda}$ (от английского “intensity” [18]), которая представляет собой угловое распределение в некотором телесном угле потока световой мощности $F_{e\lambda}$ от точечного источника излучения [19]¹:

$$I_{e\lambda} = dF_{e\lambda}/d\Omega, \quad (6)$$

где $d\Omega$ – элемент телесного угла.

Однако на практике в фотометрии в подавляющем большинстве случаев при оценке световых полей и оптических свойств конструкционных материалов используют не абсолютные измерения потоков или интенсивностей излучения, а их относительные измерения, что гораздо проще. Для этого в обиход вводят понятия индикатрис рассеяния (отражения), которые в относительных единицах характеризуют угловое распределение интенсивности рассеянного или отраженного излучений по отношению к какому-либо известному, легко моделируемому эталонному полю для идентичных условий освещения [10]. Так, для описания объемного рассеяния в качестве нормирующего эталонного поля в фотометрии используется рассеянное поле от идеального диффузного рассеивателя, который рассеивает все падающее на него излучение равномерно по всем пространственным направлениям со средней сферической интенсивностью $F_0/4\pi$, где F_0 – освещающий поток излучения [19]. Индикатриса рассеяния для него, согласно определению, не зависит от угла рассеяния и равна константе (единице). Для описания процессов поверхностного отражения в фотометрии в качестве эталона чаще всего

используется освещаемая по нормали ($\varphi = 0$) так называемая ламбертова поверхность, формирующая отраженное поле в соответствии с законом Ламберта [10]

$$I(\varphi = 0, \theta, \psi) = I_0 \cos \theta,$$

где I_0 зависит от падающего потока F_0 и в общем случае отражения без потерь [20]

$$I_0 = F_0/\pi. \quad (7)$$

Эту величину, т.е. амплитуду формируемой ламбертовой поверхностью интенсивности излучения в направлении нормали к поверхности при указанных условиях освещения, и используют в качестве нормирующей интенсивности при определении индикатрис отражения. Таким образом, индикатриса отражения любого неизвестного отражателя – $\rho_r(\varphi, \theta, \psi)$ – будет характеризоваться выражением [17]

$$\rho_r(\varphi, \theta, \psi) = I_{\text{отр}}(\varphi, \theta, \psi)/I_0 = I_{\text{отр}}(\varphi, \theta, \psi)\pi/F_0, \quad (8)$$

где $I_{\text{отр}}(\varphi, \theta, \psi)$ – регистрируемая в эксперименте отраженная интенсивность.

Индикатриса самой ламбертовой поверхности будет при этом равна $\cos \theta$. С другой стороны, поток излучения dF в электродинамике через элементарную площадку на поверхности сферы, формируемый элементарным излучателем S , расположенным в центре сферы, описывается хорошо известным уравнением [11]

$$dF = \frac{1}{2} W_e |\mathbf{H}(\mathbf{r})|^2 dA, \quad (9)$$

где W_e – волновое сопротивление среды, dA – элемент площади поверхности сферы.

Поскольку (5) получено для дальней зоны излучения, рассеивающую поверхность S в рассматриваемой задаче можно принять за точечный излучатель. Тогда, сравнивая (6) и (9) и используя выражение для определения телесного угла²

$$d\Omega = \frac{dA}{R^2} \Omega_0, \quad (10)$$

где R – радиус сферы, соответствующий расстоянию до приемника излучения ($\Omega_0 = 1$ ср), легко получить соотношение, связывающее фотометрическую и радиофизическую интенсивности излучения,

$$I_{\text{отр}}(\varphi, \theta, \psi) = W_e |\mathbf{H}(\mathbf{r})|^2 R^2 / 2\Omega_0. \quad (11)$$

Оно позволяет получить выражение для индикатрисы отражения через соответствующие радиофизические напряженности полей. Поскольку па-

¹ В дальнейшем фотометрический энергетический индекс e и индекс длины волны λ для краткости и наглядности формул будут опущены.

² См. Приложение 1.

Таблица 1. Расчетные значения индикатрис отражения по (13) для идеально проводящих случайно-шероховатых поверхностей при разных углах наблюдения θ и разных T/h в сравнении с ламбертовой индикатрисой

θ , град	Индикатрисы отражения по (13) для разных параметров шероховатости поверхности				Индикатриса Ламберта ($\cos\theta$)
	$T/h = 2$	$T/h = 4$	$T/h = 6$	$T/h = 8$	
0	0.2500	1.0000	2.2500	4.0000	1
10	0.2519	0.9848	2.1325	3.5933	0.9848
20	0.2577	0.9388	1.8082	2.5859	0.9397
30	0.2673	0.8620	1.3545	1.4568	0.8660
40	0.2808	0.7550	0.8759	0.6160	0.7660
50	0.2981	0.6211	0.4712	0.1828	0.6428
60	0.3185	0.4686	0.1991	0.0343	0.5000
70	0.3401	0.3125	0.0606	0.0035	0.3420
80	0.3590	0.1737	0.0116	0.0001	0.1736
90	0.3679	0.0733	0.0011	0	0

дающий на поверхность S поток F_0 определяется выражением

$$F_0 = \frac{1}{2} W_e |\mathbf{H}^i(\mathbf{r}')|^2 S,$$

то, используя (5), (8), (11) и опуская $\Omega_0 = 1$ ср, легко найти³ [16]

$$\rho_r(\varphi, \theta, \psi) = \frac{|\mathbf{H}^s(\mathbf{r})|^2 R^2 \pi}{|\mathbf{H}^i(\mathbf{r}')|^2 S} = \frac{\pi R^2}{S} H_1(\varphi, \theta, \psi). \quad (12)$$

Чтобы проверить правомерность полученного выражения (12), можно попытаться смоделировать ламбертов отражатель идеально проводящей шероховатой пластинкой. Такое моделирование вполне оправдано, так как и ламбертов эталон (по определению), и идеально проводящая пластинка в электродинамике (в силу своих электромагнитных свойств) отражают (рассеивают) полностью все падающее на них излучение. Более того, оно интересно еще и тем, что закон Ламберта до сих пор считается одним из наименее теоретически обоснованных законов в современной физике [22].

Для решения задачи моделирования рассмотрим структуру решения (5). Оно представляет собой два слагаемых, первое из которых нелинейно относительно S и λ и отвечает за когерентное рассеяние при малых шероховатостях. Второе слагаемое, напротив, линейно относительно S и характеризует некогерентное случайное рассеяние при больших высотах шероховатостей. Априори по-

нятно, что для достижения более или менее изотропного рассеяния, как это требуется в случае ламбертова отражения, необходимо наличие достаточно грубых шероховатостей. Это приводит к условию $g \gg 1$ и к возможности вычислить сумму в (5) методом перевала [23]. Пренебрегая на много меньшим при $g \gg 1$ первым слагаемым, используя (12) и явные выражения для компонент векторов $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{q} и $\boldsymbol{\eta}$, определяемые общей геометрией задачи, можно получить следующее выражение для индикатрисы отражения освещенной по нормали идеально проводящей пластинки с грубыми шероховатостями:

$$\rho_r(\varphi = 0, \theta, \psi) = \frac{T^2}{4h^2(1 + \cos\theta)^2} e^{-\frac{\sin^2\theta T^2}{4h^2(1 + \cos\theta)^2}}. \quad (13)$$

Таблица 1 в качестве примера иллюстрирует модельные индикатрисы по (13) для разных T/h в сравнении с ламбертовой индикатрисой ($\cos\theta$). Легко видеть, что ламбертово отражение практически идеально достигается при $T/h = 4$. Увеличение T/h меняет характер отраженного поля в сторону увеличения его зеркальности. Небольшое отличие индикатрисы с $T/h = 4$ от $\cos\theta$ для больших углов визирования может объясняться неучетом затенений и переотражений излучения на поверхности, которые не учитываются в данной постановке задачи, но которые, очевидно, присутствуют реально при грубых шероховатостях. Таким образом, “дифракционный” подход может быть весьма эффективен в задачах фотометрии и позволяет, в частности, правдоподобно описывать такое модельное явление, как ламбертов характер отражения.

³ Более строго в смысле радиофизики (по аналогии с определением сечений рассеяния) соотношение (12) следовало бы написать [21] в виде $\rho_r(\varphi, \theta, \psi) = (\pi R^2/S) \lim_{R \rightarrow \infty} |\mathbf{H}^s(\mathbf{r})|/|\mathbf{H}^i(\mathbf{r}')|$, где знак предела означает выполнение условия дальней зоны.

СРЕДЫ С КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Теперь можно перейти к более общему случаю сред с конечной проводимостью. Для них необходимо решать исходные интегральные уравнения (1). Так, для напряженности рассеянного магнитного поля потребуется решить уравнение

$$\mathbf{H}^S(\mathbf{r}) = \frac{ike^{ikR}}{4\pi R} \int_S e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r}')} \{ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') + (\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^T - 1)\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \} dS'. \quad (14)$$

Наиболее просто это можно сделать для случая среды с хорошей проводимостью, когда на поверхности шероховатой пластины могут быть сформулированы импедансные граничные условия Леонтовича [24]

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \quad (15)$$

отражающие факт непрерывной трансформации тангенциальных компонент поля на поверхности хорошего проводника в поперечные компоненты поля уходящей вглубь проводника волны [11]. При $\sqrt{\mu/\varepsilon} \rightarrow 0$ условие (15), как и следовало ожидать, переходит в условие идеального проводника. В случае аппроксимации Кирхгофа, например для вертикальной поляризации падающего излучения, тангенциальные компоненты полей на S из условия (15) могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{H} &= \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\cos \varphi}} \mathbf{n} \times \mathbf{H}^i, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} &= \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \varphi} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^i, \end{aligned} \quad (16)$$

где φ – локальный угол падения, \mathbf{H}^i и \mathbf{E}^i – векторы поля падающей волны.

Дальнейшее упрощение решения (14) может быть связано с заменой коэффициентов в (16), зависящих от локального угла падения, их средними величинами. Подставляя эти средние в (14), можно получить решение, идентичное решению (5) для идеального проводника, за исключением видоизмененного множителя $|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} \times \boldsymbol{\eta}|^2$. Например, для неполяризованного света в (5) вместо указанного векторного произведения будет стоять сумма

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} \times \boldsymbol{\eta}_1}{1 + \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} + \frac{(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^T - 1)\mathbf{q} \times \mathbf{e}_1}{\cos \varphi \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} + 1} \right|^2 + \\ & + \left| \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} \times \boldsymbol{\eta}_2}{1 + \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} + \frac{(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^T - 1)\mathbf{q} \times \mathbf{e}_2}{\cos \varphi \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} + 1} \right|^2, \end{aligned} \quad (17)$$

где индексами 1 и 2 обозначены вертикальная и горизонтальная поляризации, \mathbf{e} – орт вектора напряженности электрического поля, φ – нелокальный угол падения. Остальной вид решения (5) и соответственно все его статистические свойства останутся неизменными. Интересно отметить, что для случая нормального освещения поверхности поляризация излучения не играет никакого значения, а сумма (17) может быть существенно упрощена и выражена в явном виде. При $\mu = 1$ и использовании комплексного коэффициента преломления среды ($N = n + i\chi$) она приобретет вид

$$\frac{(1 + \cos \theta)^2 [(n - 1)^2 + \chi^2]}{(n + 1)^2 + \chi^2}. \quad (18)$$

Таким образом, выражение для индикатрисы отражения излучения от хорошо проводящей и сильно шероховатой поверхности будет полностью идентично (13), за исключением появления добавочного множителя – коэффициента отражения Френеля. Угловые характеристики рассеянного поля останутся неизменными, так как в (5) при нормальном падении света векторное произведение $|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} \times \boldsymbol{\eta}|^2$ для идеального проводника имеет вид $(1 + \cos \theta)^2$.

Биологические ткани и среды, безусловно, не являются средами с хорошей проводимостью в оптическом диапазоне длин волн. Типичные значения действительной и мнимой частей комплексного показателя преломления для них можно получить из многочисленных литературных данных (см. [1] и ссылки там). Они оказываются равными по порядку величин следующим значениям:

$$n \approx 1.1-1.6 \quad \text{и} \quad \chi \approx 10^{-10}-10^{-4},$$

т.е. биологические ткани являются хорошими диэлектриками, для которых проводимостью среды при дифракционных расчетах, вообще говоря, можно пренебречь. Соответственно их можно было бы рассматривать как частный случай сред с хорошей проводимостью, если бы условия (15) и (16) для них могли считаться выполненными.

Вопросу применимости импедансных граничных условий для диэлектрических сред посвящена работа [12]. В ней делается вывод, что они справедливы не только для сред с хорошей про-

димостью, но и для идеальных диэлектриков с большой величиной действительной части коэффициента преломления. В этом случае можно считать действительным и нулевым угол преломления излучения на границе среда–воздух, что и приводит к условиям (15) и (16). Кроме того, для диэлектриков, как показано в цитируемой работе, ошибки применения импедансных граничных условий сказываются, главным образом, не на угловом распределении интенсивности рассеянного поля, а на его амплитуде. Угловое же уширение излучения для диэлектриков, а именно оно нас и интересует в первую очередь, даже при таких грубых допущениях, как (15), описывается интегральными уравнениями достаточно правдоподобно. Более того, авторами, видимо, осталось незамеченным, что при нормальном ($\varphi = 0$) освещении диэлектрической поверхности нелокальный угол преломления излучения на границе раздела сред также является действительным и нулевым, а волна, проходящая в среду, – однородной и поперечной, так что условия (15), (16) и в этом случае остаются работоспособными. Это позволяет использовать полученные выше решения для проводников и для оценки рассеяния от диэлектрических сред и биотканей при условии $\varphi = 0$ (наиболее часто используемый на практике случай). Таким образом, согласно (13) и (18), биоткани при нормальном освещении их поверхности должны характеризоваться незначительным поверхностным отражением излучения (на уровне нескольких процентов) и широкой индикатрисой отражения (наподобие ламбертовой), на что и указывается в большинстве публикаций, описывающих данные эксперимента (имеются в виду, естественно, только чисто граничные эффекты).

Для получения решения для проходящего внутрь среды излучения и формулировки выражений для его индикатрис необходимо в существующей расчетной схеме направить вектор распространения излучения ω внутрь среды (пластины). Также необходимо учесть, что среда распространения излучения под поверхностью будет иметь коэффициент преломления, отличный от 1. В остальном получение решения достаточно рутинно и мало чем отличается от уже описанных процедур. Угловое рассеяние при больших шероховатостях будет и для проходящего в среду излучения описываться вторым слагаемым в (5), но с видоизмененными компонентами векторов \mathbf{q} и \mathbf{k} , а векторное произведение (17) должно будет трансформироваться в коэффициент пропускания Френеля. Эти простые соображения позволяют на основе уже имеющихся решений (13) и (18) получить (без рутинного вывода) оце-

ночную формулу для индикатрисы проходящего внутрь диэлектрической биоткани излучения

$$\rho_{\tau}(\varphi = 0, \theta, \psi) = \frac{n^3 (n-1)^2 T^2}{h^2 (n+1)^2 (n \cos \theta - 1)^4} e^{-\frac{n^2 \sin^2 \theta T^2}{4h^2 (n \cos \theta - 1)^2}}, \quad (19)$$

где ρ_{τ} – индикатриса пропускания, n – действительная часть показателя преломления среды.

Может, правда, возникнуть сомнение в справедливости выполнения условий дальней зоны приема непосредственно под поверхностью и соответственно в применимости понятия индикатрис в этом случае. Эти сомнения можно снять более детальным рассмотрением процедур интегрирования уравнений при нахождении статистических параметров рассеянных полей [16] и вопроса о расположении дальней зоны в случае наличия грубых шероховатостей на поверхности [25]. При интегрировании основных уравнений по поверхности для нахождения некогерентной компоненты рассеянного поля, как указано в [16], существенная область интегрирования лежит в пределах не далее длины корреляции T . Именно эта область и является так называемой доминантной областью [11] при формировании дифрагированного поля от грубо шероховатой поверхности. Приходящее от дальних элементов поверхности излучение в точке приема практически не играет никакой роли по сравнению с излучением, “распределенным” в пределах T . Расстояние до дальней зоны с появлением шероховатости поверхности резко уменьшается. Для грубо шероховатых поверхностей оно не превышает расстояния в несколько длин волн [25], что в приближении Кирхгофа также соизмеримо с T . Таким образом, поле при прохождении излучения через грубо шероховатую границу раздела формируется в пределах области в несколько T , и для анализа чисто поверхностных эффектов (без учета рассеяния и поглощения излучения в толще среды, что является уже предметом ТП) все приведенные выше выкладки остаются в силе.

Наглядное представление о степени уширения излучения при переходе случайно-шероховатой границы раздела диэлектрической среды в зависимости от угла θ и величин n , T , h можно получить из табл. 2. В ней представлены значения индикатрис по (19) для набора параметров в абсолютном выражении. Там же для каждого случая вычислены значения полусферического коэффициента пропускания путем интегрирования индикатрис по телесному углу в пределах нижней полусферы. Интересно, что эти данные полностью коррелируют с данными на отражение. Так, если взять диэлектрическую поверхность ($\chi = 0$) с $T/h = 4$ и $n = 1.4$, то интегрирование ее индикатрис-

Таблица 2. Расчетные значения индикатрис пропускания по (19) для диэлектрических поверхностей в зависимости от угла наблюдения и параметров поверхности

θ , град	Параметры поверхности						
	$n = 1.4$			$T/h = 8.0$			
	$T/h = 4.0$	$T/h = 8.0$	$T/h = 16.0$	$n = 1.2$	$n = 1.6$	$n = 1.8$	$n = 2.0$
0	47.64	190.6	762.2	571.2	107.7	74.39	56.89
5	34.29	43.57	1.773	6.411	46.44	41.17	35.80
10	11.41	0.325	0	0.001	3.060	6.234	8.263
15	1.150	0.001	0	0	0.016	0.176	0.541
20	0.012	0	0	0	0.001	0.001	0.006
25	0	0	0	0	0	0	0
	Полусферический коэффициент пропускания						
	0.982	0.975	0.975	0.993	0.951	0.924	0.896

сы отражения (табл.1) по верхней полусфере с учетом коэффициента отражения Френеля по (18) даст величину нормального полусферического коэффициента отражения $r = 0.027$, что в сумме с соответствующим коэффициентом пропускания $\tau = 0.982$ (табл.2) дает значение 1.009 (т.е. с точностью до 1% данные на отражение и пропускание “стыкуются”, и потери энергии на границе не происходит).

Хорошо по данным табл. 2 прослеживается уширение пучка при увеличении степени шероховатости поверхности и увеличении показателя преломления среды. Правда, во всех представленных вариантах, наиболее близко отражающих реальные случаи биологических тканей, прошедший пучок в сильной степени сохраняет свою первоначальную направленность, а угловая расходимость прошедшего излучения оказывается не очень высока. Тем не менее она может сказываться на общем решении в задачах ТП для поля излучения внутри среды по сравнению с моделью параллельного внешнего потока и плоской границы раздела. В таком случае формулировка граничной индикатрисы по (19) в качестве граничных условий для задач ТП может позволить учесть и изучить этот эффект.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Завершая работу, можно констатировать, что решение задачи дифракции электромагнитных волн на случайно-шероховатой поверхности как с граничными условиями идеального проводника, так и с импедансными граничными условиями позволяет правдоподобно, аналитически и в замкнутом виде описывать поверхностное рассеяние света на шероховатой границе. Для случая нормального освещения поверхности и грубых шероховатостей оценочные аналитические формулы могут быть получены и для диэлектрических

материалов и сред, например биотканей, в том числе и для излучения, проходящего внутрь среды. Во всех случаях полученные решения могут быть сформулированы в терминах фотометрических индикатрис рассеяния, что позволяет их непосредственно использовать в расчетных задачах ТП в качестве граничных условий. Более того, полученные выражения (13) и (19) в совокупности могут использоваться в ТП и как дополнительная альтернатива известной индикатрисе рассеяния Хенни–Гринштейна [3]. Что же касается поставленного в начале статьи основного вопроса о рассеянии проходящего в среду излучения, то, как показали расчеты, в общем случае диэлектрических поверхностей прошедший шероховатую границу пучок света в сильной степени сохраняет свою первоначальную направленность, а угловая расходимость прошедшего излучения оказывается не очень большой.

В заключение автор хотел бы выразить искреннюю признательность и благодарность Ю.В. Булавскому за помощь в описании физико-математических основ получения базовых аналитических решений в теории дифракции электромагнитных волн на случайно-шероховатых поверхностях.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

ПОЯСНЕНИЯ К ВЫРАЖЕНИЮ (10) ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕЛЕСНОГО УГЛА

Выражение (10) несколько отличается по форме записи от известных в фотометрии классических формул для определения телесного угла, поэтому требует, видимо, дополнительных пояснений. Очень часто математические операции с величинами углов проводят таким образом, что создается стойкое впечатление о безразмерности величин углов, используемых в расчетных формулах. Например, в фотометрии чисто математи-

ческое определение телесного угла часто формулируется (пример из [19]) следующим образом: $d\Omega = dA/R^2$, откуда величина $d\Omega$, вроде бы, должна являться величиной безразмерной, хотя и носит название “стерадиан”, так как деление “квадратных метров” на “метры квадратные” дает безразмерное отношение для величины угла. Однако, даже если рассматривается обычный плоский угол, у всех “на слуху” существуют различные системы мер для измерения плоских углов: в единицах (долях) поворота, в радианах (радианная мера угла), в градусах (градусная мера) и т.п. Эти системы мер, вообще говоря, физичны, т.е. имеют переводные коэффициенты из одной системы в другую, собственные наименования и производные величины (скажем, минуты или секунды), так что в физическом смысле угол в полной мере в соответствии с классическим определением любой измеряемой величины [26] должен быть отнесен к величинам размерным. Например, угол можно взять и измерить. Соответствующим прибором – транспортиром – можно получить определенное числовое значение начерченного на бумаге угла, в данном случае в градусах. В чем же здесь путаница? Следует ли телесный угол при физических расчетах считать размерной или безразмерной величиной?

Общее выражение для любой размерной физической величины формулируется согласно классической теории размерности в физике следующим образом [26]:

$$\begin{aligned} G &= N_G[G], \\ \dim G &\equiv \dim[G], \end{aligned} \quad (\text{П1})$$

где G – измеряемая величина, $N_G \equiv \{G\}$ – количество содержания в G некоторого эталона сравнения (единицы измерения), $[G]$ – некий эталон или единица измерения (сравнения).

С другой стороны, из элементарной геометрии на плоскости известно [27], что если рассматривать центральный угол в окружности, то его величина окажется пропорциональной отношению длины дуги окружности внутри этого угла к ее радиусу. Таким образом, с учетом (П1) для определения любого центрального угла α в самом общем виде мы обязаны записать общее выражение

$$\alpha = k_0 \frac{N_S[S]}{N_R[R]}, \quad (\text{П2})$$

где N_S и N_R – количественные выражения длин дуги и радиуса соответственно, $[S]$ и $[R]$ – единицы размерности длин дуги и радиуса, k_0 – коэффициент пропорциональности.

В этом случае становится понятным, что выбором соответствующей величины k_0 и определяется в каждой конкретной задаче желаемая система мер для измерения угла. При $k_0 = 1/2\pi$ угол α

будет измеряться в долях поворота, при $k_0 = 1$ угол измеряется в радианах, а при $k_0 = 180/\pi$ – в градусах. Сравнивая (П2) и (П1), сокращая размерности длин радиуса и дуги ($[S] = [R]$), а также исходя из $N_\alpha = N_S/N_R$, можно определенно утверждать, что коэффициент пропорциональности k_0 в (П2) выполняет некую роль эталонной единицы для измерения угла, т.е. $k_0 \equiv [\alpha]$. Его, правда, нельзя, как эталонный метр приложить к измеряемому углу и отсчитать, сколько раз он укладывается на нем. Вместо него для этой цели по определению используется угол с длиной дуги, равной радиусу [27]. Но физический смысл коэффициента k_0 именно такой. Он определяет размерность этого эталонного угла сравнения и его принципиально в большинстве случаев нельзя исключать из расчетных физических формул. Другое дело, что в радианной системе мер $k_0 \equiv [\alpha] = 1$ рад, и для краткости этот коэффициент практически всегда опускается. Но в общих физических формулах он всегда должен присутствовать.

Аналогично в электродинамике в свое время вставал вопрос об измерении и размерности материальных параметров среды (диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостей) и “уравнении” разных размерностей в уравнениях Максвелла. Выход из положения был также найден с привлечением теории размерности путем введения для вакуума специальных размерных коэффициентов ϵ_0 и μ_0 . Их тоже нельзя физически приложить к измеряемой величине, но они образуют необходимую для любой задачи электродинамики базовую размерную систему мер и фигурируют во всех основных расчетных соотношениях (подробнее об этом см. [28]).

Таким образом, при физических расчетах любой угол должен приниматься во внимание с учетом его размерности. В этом случае окончательное выражение для определения угла α в примере с окружностью при обозначении $k_0 \equiv [\alpha] \equiv \alpha_0$ должно формулироваться следующим образом:

$$\alpha = \frac{S}{R} \alpha_0,$$

где $S = N_S[S]$ – длина дуги и $R = N_R[R]$ – радиус окружности, а окончательное выражение для телесного угла в форме (10) уже не должно вызывать особых вопросов, несмотря на то что для телесных углов единственной устоявшейся на сегодня системой мер является радианная (точнее – стерадианная) система с $[\Omega] = \Omega_0 = 1$ ср.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тучин В.В. Лазеры и волоконная оптика в биомедицинских исследованиях. Саратов: Изд-во СГУ, 1998. 384 с.

2. Rogatkin D.A., Tchernyi V.V. // Proc. SPIE. 1999. V. 4059. P. 73–78.
3. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981.
4. Иванов А.П. и др. Распространение света в плотноупакованных дисперсных средах. Минск: Наука и техника, 1988. 191с.
5. Rogatkin D.A. // Квант. электрон. 2001. Т. 31(3). С. 279–281.
6. Groenhuis R.A., Ferwerda H.A., Ten Bosch J.J. // Appl. Opt. 1983. V. 22. № 16. P. 2456–2462.
7. Орлов Р.А., Торгашин Б.Д. Моделирование радиолокационных отражений от земной поверхности. Л.: ЛГУ, 1978. 148 с.
8. Топорец А.С. Оптика шероховатой поверхности. Л.: Машиностроение, 1988. 191с.
9. Beckman P., Spizzino A. The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces. Milan; London; N.Y.: Pergam. Press, 1963.
10. Физический энциклопедический словарь / Под ред. Прохорова А.М. М.: Сов. энциклопедия, 1983. 982 с.
11. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989. 544 с.
12. Марадудин А.А., Мендес Е.Р. // Опт. и спектр. 1996. Т. 80. № 3. С. 459–470.
13. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 250 с.
14. Chen M.F., Wu S.C., Fung A.K. // J. Wave-Material Interaction. 1987. V. 2. № 1. P. 9–27.
15. Хусу А.П., Витенберг Ю.Р., Пальмов В.А. Шероховатость поверхностей, теоретико-вероятностный подход. М.: Наука, 1975.
16. Исакович М.А. // ЖЭТФ. 1952. В. 3 (9). С. 305–314.
17. Rogatkin D.A., Булавский Ю.В., Коняхин В.В. // Препринт ВЦ СО АН СССР № 896. Новосибирск, 1990. 35 с.
18. Международный светотехнический словарь / Под ред. Лазарева Д.Н. М.: Русский язык, 1979. 278 с.
19. Мешков В.В. Основы светотехники. Учеб. пособие для вузов. Ч.1. М.: Энергия, 1979. 368 с.
20. Ильинков В.А. Основы фотометрии. Учеб. пособие для студентов. Ч.1. Минск: БГУИР, 1994. 54 с.
21. Rogatkin D.A. // Оптический журнал. 1992. № 9. С. 72–74.
22. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.Н. Введение в статистическую физику. Ч. 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 375 с.
23. Федорюк М.В. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 245 с.
24. Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972. 424 с.
25. Rogatkin D.A., Коняхин В.В. // ПТЭ. 1992. № 5. С. 200–202.
26. Камке Д., Кремер К. Физические основы единиц измерения. М.: Мир, 1980. 208 с.
27. Выгодский Я.Я. Справочник по элементарной математике. М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1966. 424 с.
28. Стреттон Дж.А. Теория электромагнетизма. М.; Л.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1948. 539 с.